توان و ریشه (عملیات مربوط به آن)

برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

الف) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) $a^m \times b^m = (ab)^m$

ج) $(a^m)^n = a^{mn}$

تذکر: برای هر $a \neq 0$ تعریف می‌کنیم:

$$a^0 = 1$$

مثال) $3^4 \times 3^5 = 3^{4+5} = 3^9$

$2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$

$(4^3)^2 = 4^6$

تعریف: هرگاه $-m$ یک عدد صحیح منفی باشد، آنگاه تعریف می‌کنیم:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

یعنی هر عدد به توان منفی را می‌توان به صورت عکس آن عدد به توان مثبت نوشت.

مثال:

ب) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

الف) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

قضیه: برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

الف) $a^n \div a^m = \frac{a^m}{a^m} = a^{n-m}$ $\qquad a \neq 0$

ب) $a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ $\qquad b \neq 0$

مثال:

$4^9 \div 4^3 = 4^{9-3} = 4^6$

$21^6 \div 7^6 = \left(\frac{21}{7}\right)^6 = 3^6$

تذکر: برای جمع و تفریق اعداد توان دار، قاعده‌ی خاصی وجود ندارد و باید ابتدا آن اعداد را به توان رساند و سپس عمل جمع یا تفریق را انجام داد.

مثال: حاصل عبارت $۴^۲ + ۳^۲$

$$۴^۲ + ۳^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵$$

تذکر ۲: برای ضرب یا تقسیم اعداد توان دار که دارای پایه‌های مختلف و نماهای مختلف هستند، هیچ قاعده‌ی خاصی وجود ندارد و باید ابتدا آن اعداد را به توان رساند و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام داد.

مثال: ب) $۳^۴ \div ۹^۲ = ۸۱ \div ۸۱ = ۱$ الف) $۲^۳ \times ۳^۲ = ۸ \times ۹ = ۷۲$

تذکر ۳: هر کسر به توان منفی را می‌توان با تغییر جای صورت و مخرج کسر به صورت توان مثبت نوشت.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

مثال: $\left(\frac{۳}{۷}\right)^{-۴} = \left(\frac{۷}{۳}\right)^{۴}$

تمرین: حاصل را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

الف) $(-۲)(-۲)(-۲)$

ب) $(-۰/۲)(-۰/۲)(-۰/۲)(-۰/۲)$

تمرین: اعداد را به صورت توان منفی بنویسید.

الف) $۰/۰۱۷$ ب) $۰/۰۰۱۲۵$ پ) $۰/۰۰۰۰۱$

تمرین: مقدار هر یک از عبارات زیر را به دست آورید.

الف) $۳^{۲} \times ۳^{۳}$ ب) $۱۵^{۳} \div ۵^{۳}$

ج) $(\frac{۷}{۱۳})^{۵} \times (\frac{۷}{۱۳})^{۱۰}$ د) $۳^{۲^{۴}}$

ریشه

اگر a و b دو عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد، به طوری که $b^n = a$ آن‌گاه b را ریشه‌ی n ام a می‌نامیم. در تساوی $9 = 3^2$ عدد ۳ ریشه‌ی دوم عدد ۹ است. تساوی $b^n = a$ را می‌توان به صورت $b = \sqrt[n]{a}$ نشان داد که نماد $\sqrt{\ }$ را رادیکال می‌گوییم و n را فرجه می‌نامند.

$$64 = 4^3 \longleftrightarrow \sqrt[3]{64} = 4$$

$$81 = 9^2 \longleftrightarrow \sqrt{81} = 9$$

قضیه:

اگر $a \in R$ و $m, n \in N$ آن‌گاه

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} \quad \text{یا} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$3^{3/2} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$$

تذکر: در قضیه‌ی قبل هرگاه n زوج و m فرد باشد، باید a عددی نامنفی اختیار کرد.

$$(-4)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-4)^2} = \sqrt[3]{16}$$

تمرین: عبارت‌های زیر را در صورت امکان ساده کنید.

الف) $\sqrt[7]{2^{11}}$

ب) $(\sqrt[4]{3})^2$

ج) $(\sqrt[6]{25})^3$

د) $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \times \sqrt[3]{10}$